Prof. Dr. Alfred Toth

Von Objekten zu Pfeilen und von Pfeilen zu Spuren

1. Bekannt ist die Aussage Saunders Mac Lanes, der Mitbegründers der Kategorietheorie, dass man diese auch „als Behandlung des Problems auffassen [könne], wie man ohne Elemente auskommen und statt ihrer Pfeile benutzen" könne (1972, S. iii). Da die semiotischen Subzeichen zugleich entitätische Momente und dynamische Semiosen sind (vgl. Bense 1975, S. 92), also eine ähnliche Doppelnatur zeigen wie die Elektronen, kann man sie als Objekte im Sinne der Mengentheorie oder als Abbildungen im Sinne der Kategorietheorie beschreiben (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.). Die in Toth (2009a) eingeführten Spuren sind als „gerichtete Objekte" zu verstehen, stehen also der Objektauffassung der Subzeichen und Zeichenklassen näher als die Morphismen der semiotischen Kategorien. In dem vorliegenden Aufsatz wird allerdings ein neues Verfahren gezeigt, wie man auch Spuren, obwohl sie ja gerade auf dem Objekbegriff, und das heisst, primär statisch, eingeführt worden sind, weitgehend von ihrer Substanz befreien und daher einem dynamischen Abbildungsbegriff annährern kann. Allerdings bestehen zwischen diesem erweiterten Spurbegriff und dem Begriff der kategoriellen Abbildung etwa so viele Gemeinsamkeiten wie Unterschiede, womit sie jedenfalls nicht gegenseitig ersetzbar sind.

2. In Toth (2009b) hatten wir gezeigt, dass man, wenn man Domänen und Codomänen von 1-Objekten austauscht, 2mal 8 verschiedene Morphismen erhält. Sei x := (A → B) mit A = 1 und B = 2, dann gilt:

1. $(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}$	9. $\times(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
2. $(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}$	10. $\times(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
3. $(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$	11. $\times(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
4. $(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$	12. $\times(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
5. $(1 \rightleftarrows 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$	13. $\times(1 \rightleftarrows 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
6. $(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$	14. $\times(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
7. $(2 \rightleftarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$	15. $\times(2 \rightleftarrows 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
8. $(2 \leftrightarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$	16. $\times(2 \leftrightarrows 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$

Wenn wir die Domänen der Spuren eliminieren, erhalten wir:

1. $(\rightarrow_{2}) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
2. $(\leftarrow_{2}) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
3. $(\rightarrow_{1}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
4. $(\leftarrow_{1}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
5. $(\rightleftarrows_{2}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
6. $(\leftrightarrows_{2}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$
7. $(\rightleftarrows_{1}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
8. $(\leftrightarrows_{1}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
9. $\times(\rightarrow_{2}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
10. $\times(\leftarrow_{2}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
11. $\times(\rightarrow_{1}) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
12. $\times(\leftarrow_{1}) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
13. $\times(\rightleftarrows_{2}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
14. $\times(\leftrightarrows_{2}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
15. $\times(\rightleftarrows_{1}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
16. $\times(\leftrightarrows_{1}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$

d.h. in der linken und in der rechten Spalte stehen gleiche 1-Spuren verschiedenen 1-Morphismen(kombinationen) gegenüber. Spuren sind daher weniger differenziert als Abbildungen.

2. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Primzeichen auf Subzeichen, d.h. auf Relationen der Form (a.b) mit a $\in$ {1., 2., 3.} und b $\in$ {.1, .2, .3}, was nichts anderes ist als die Menge der kartesischen Produkte einer 3×3-Matrix, abbilden. Allgemein haben wir dann in der Form von Kategorien

1. $(A \rightarrow (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
2. $(B \rightarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
3. $(A \leftarrow (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
4. $(B \leftarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
5. $((AB) \rightarrow A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
6. $((AB) \rightarrow B) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
7. $((AB) \leftarrow A) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}$
8. $((AB) \leftarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
9. $(A \rightleftarrows (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
10. $(B \rightleftarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
11. $(A \leftrightarrows (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
12. $(B \leftrightarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
13. $((AB) \rightleftarrows A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
14. $((AB) \rightleftarrows B) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
15. $((AB) \leftrightarrows A) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}$
16. $((AB) \leftrightarrows B) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

Damit ist die Existenz semiotischer 2-Kategorien (und 2-Morphismen) nachgewiesen. Der Nachweis semiotischer 2-Spuren erfolgt so:

1. $(\rightarrow_{(AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
2. $(\rightarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
3. $(\leftarrow_{(AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
4. $(\leftarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
9. $(\rightleftarrows_{(AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
10. $(\rightleftarrows_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
11. $(\leftrightarrows_{(AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
12. $(\leftrightarrows_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

5. $(_{\rightarrow A}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$ 13. $(_{\rightleftarrows A}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

6. $(_{\rightarrow B}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$ 14. $(_{\rightleftarrows B}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

7. $(_{\leftarrow A}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}$ 15. $(_{\leftrightarrows A}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}$

8. $(_{\leftarrow B}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$ 16. $(_{\leftrightarrows B}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

Das Resultat ist erwartungsgemäss dasselbe wie in Abschnitt 1: Die Hälfte der so erzeugten Spuren ist redundant. Dasselbe gilt praemissis praemittendis, wenn wir zu 3-, 4-, ..., n-Spuren aufsteigen.

3. In einer mehr inhaltlichen Klassifikation haben wir also:

3.1. Zkln-Spuren neben Spuren-Zkln

$\mathrm{Zkl}_{\mathrm{Sp}} = (3_{\rightarrow a}\ 2_{\rightarrow b}\ 1_{\rightarrow c})$

$\mathrm{Sp}_{\mathrm{Zkl}} = (_{\rightarrow a}\ _{\rightarrow b}\ _{\rightarrow c}) \equiv (\rightarrow a_1\ \rightarrow b_2\ \rightarrow c_3)$

3.2. Rthn-Spuren neben Spuren-Rthn

$\mathrm{Rth}_{\mathrm{Sp}} = (1_{\leftarrow c}\ 2_{\leftarrow b}\ 3_{\leftarrow a})$

$\mathrm{Sp}_{\mathrm{Rth}} = (_{\leftarrow c}\ _{\leftarrow b}\ _{\leftarrow a}) \equiv (\leftarrow c_1\ \leftarrow b_2\ \leftarrow a_3)$

3.3. Zeichenobjekt-Spuren neben Objektzeichen-Spuren

$\mathrm{ZO}_{\mathrm{Sp}} = (<M, \mathcal{M}>_{\rightarrow a}, <O, \Omega>_{\rightarrow b}, <I, \mathcal{J}>_{\rightarrow c})$

$\mathrm{OZ}_{\mathrm{sp}} = (<\mathcal{M}, M>_{\rightarrow a}, <\Omega, O>_{\rightarrow b}, <\mathcal{J}, I>_{\rightarrow c})$

3.4. Spuren-Zeichenobjekte neben Spuren-Objektzeichen

$\mathrm{ZO}_{\mathrm{Sp}} = (\rightarrow a_{<M, \mathcal{M}>}, \rightarrow b_{<O, \Omega>}, \rightarrow c_{<I, \mathcal{J}>})$

$\mathrm{OZ}_{\mathrm{sp}} = (\rightarrow a_{<\mathcal{M}, M>}, \rightarrow b_{<\Omega, O>}, \rightarrow c_{<\mathcal{J}, I>})$

3.5. Objekt-Spuren neben Spuren-Objekten

$\mathrm{OR}_{\mathrm{sp}} = (\mathcal{M}_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J})$

$\mathrm{Sp}_{\mathrm{OR}} = (_{\rightarrow a}, _{\rightarrow b}, _{\rightarrow c}) \equiv (\rightarrow a_{\mathcal{M}}, \rightarrow b_{\Omega}, \rightarrow c_{\mathcal{J}})$

Um es einmal mehr zu betonen: Ein Zeichen ist keine Spur, und eine Spur ist kein Zeichen. In Sonderheit ist eine Spur auch kein Index, wie dies sowohl Eco als auch Bense angenommen haben. Eine Spur ist die Basis eines Rekonstruktes. Als solches ist sie primär ein Objekt und hat sekundär eine Verweisfunktion. Wohin sie verweist, ist jedoch offen: Neben

$(\rightarrow \mathsf{a}\ m, \rightarrow \mathsf{b}\ \Omega, \rightarrow \mathsf{c}\ \mathcal{J})$

sind z.B. auch

$(\rightarrow \mathsf{a}\ \Omega, \rightarrow \mathsf{b}\ m, \rightarrow \mathsf{c}\ \mathcal{J})$

$(\rightarrow \mathsf{a}\ \mathcal{J}, \rightarrow \mathsf{b}\ \mathcal{J}, \rightarrow \mathsf{c}\ \mathcal{J})$

$(\rightarrow \mathsf{a}\ \Omega, \rightarrow \mathsf{b}\ \Omega, \rightarrow \mathsf{c}\ m)$, usw.

denkbar. Damit haben die Spuren, obwohl sie nur die Hälfte der Differenzierungen zwischen Domänen und Codomänen der Morphismen abzudecken vermögen, eine enorm grössere Bewegungsfreiheit bei der Rekonstruktion von Zeichen, denn gerade weil sie nicht alle kategorietheoretischen Fälle abzudecken vermögen, können sie viel mehr mögliche Kombinationen eingehen als jene. Die Abbildung von Morphismen auf semiotische Objekte ist bijektiv; die Abbildung von Spuren auf semiotische Objekte ist injektiv.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Mac Lane, Saunders, Kategorien. Berlin 1972

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Zur spurentheoretischen Begründung der semiotischen Basistheorie. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009a)

Toth, Alfred, n-Spuren über austauschbaren Domänen und Codomänen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009b)

25.10.2009